# Induksi Matematika

Sesi 02-03

1

## Definisi & Fungsi

- Metoda pembuktian yang baku di dalam matematika.
- Digunakan untuk membuktikan pernyataan perihal bilangan bulat positif.
- Dapat mengurangi pembuktian bahwa semua bilangan bulat positif termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan jumlah langkah terbatas

2

## Prinsip Induksi Matematika Sederhana

- Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n. untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu membuktikan bahwa :
  1. Langkah 1 : P(1) benar/terdefinisi → **Basis Induksi**, dan
  2. Langkah 2 : Untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$, jika p(n) benar maka p(n+1) juga benar → **Hipotesis Induksi**
- Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n

3

## Contoh

- Tunjukkan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah $n^2$ melalui induksi matematik.
- Penyelesaian
  1. Langkah 1(Basis induksi): Untuk $n = 1$, kita peroleh jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$. Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1
  2. Langkah 2 (Hipotesis induksi): Andaikan untuk $n \geq 1$ pernyataan $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ adalah benar [bilangan ganjil positif ke-n adalah $(2n - 1)$].

     Kita harus memperlihatkan bahwa $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$ juga benar.

     Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

     $$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)] + (2n + 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \rightarrow \text{benar} \end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan langkah 2 keduanya telah dibuktikan benar, maka jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah $n^2$ .

4

## Prinsip Induksi yang Dirampatkan

- Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.
- Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
  1. Basis Induksi: $p(n_0)$ benar, dan
  2. Hipotesis Induksi : Untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$, jika p(n) benar maka p(n+1) juga benar

5

## Contoh

- Tunjukkan bahwa untuk $n \geq 1$, $1+2+3+\ldots+n = n(n+1) / 2$ melalui induksi matematik.
- Penyelesaian
  1. Langkah 1(Basis induksi ): Untuk $n = 1$, kita peroleh $1 = 1 (1+1) / 2$.

     $1 = 1 (1+1) / 2 = 1 (2) / 2 = 2/2 = 1 \rightarrow$ benar dan terdefinisi
  2. Langkah 2 (Hipotesis induksi) : Andaikan bahwa untuk $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n (n+1) / 2$ adalah benar (hipotesi induksi).

     Kita harus menunjukkan bahwa

     $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = (n+1) [(n+1) + 1)] / 2$ juga benar.

     Untuk membuktikan ini, tunjukkan bahwa

     $$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) &= (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n+1) \\ &= [\, n (n+1) / 2 \,] + (n+1) \\ &= [\, (n^2 + n) / 2 \,] + (n + 1) \\ &= [\, (n^2 + n) / 2 \,] + [\, (2n + 2) / 2 \,] \\ &= (n^2 + 3n + 2) / 2 \\ &= (n + 1) (n + 2) / 2 \\ &= [\, (n + 1) (n + 1) + 1 \,] / 2 \rightarrow \text{benar} \end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan langkah 2 keduanya telah dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat positif n terbukti $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n (n+1) / 2$.

6

## Contoh

- Buktikan bahwa semua bilangan berbentuk $7^n$-$2^n$ dapat dibagi oleh 5 untuk setiap n bilangan asli.
- Solusi: Pernyataan yang akan dibuktikan adalah

$$P_n : 7^n - 2^n \text{ dapat dibagi oleh } 5$$

$P_1$ adalah benar sebab $7^1 - 2^1 = 5$. Selanjutnya, kita asumsikan bahwa $P_n$ adalah benar. Dengan asumsi ini kita akan menyelidiki kebenaran pernyataan $P_{n+1}$ . Untuk itu, kita perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 7^{n+1} - 2^{n+1} &= 7.7^n - 7.2^n + 7.2^n - 2.2^n \\ &= 7[7^n - 2^n] + 5.2^n \\ &= 7(5m) + 5.2^n \qquad m \in \mathbf{N} \text{ (asumsi } P_n \text{ benar)} \\ &= 5(7m + 2^n) \end{aligned}$$

Karena $7m + 2^n$ bilangan asli, maka dari kesamaan terakhir kita dapat menyim-pulkan bahwa $7^{n+1} - 2^{n+1}$ dapat dibagi dengan 5. Dengan kata lain, pernyataan $P_{n+1}$ adalah benar.

Dengan demikian, bilangan berbentuk $7^n - 2^n$ dapat dibagi oleh 5 untuk setiap $n$ bilangan asli.

7

## Referensi


1. Rinaldi Munir, "Materi Kuliah Matematika Diskrit",Informatika-ITB, Bandung,2003
2. Rinaldi Munir, "Matematika Diskrit",Informatika, Bandung,2001
3. ______,"Induksi Matematika [online]", url:https://asimtot.files.wordpress.com/2010/05/induksi-matematika.pdf, Tanggal Akses: 14 September 2014 16:17


8