Relasi & Fungsi

Sesi 06

1

RELASI

2

Matriks

- Matriks adalah adalah susunan skalar elemen-elemen dalam bentuk baris dan kolom.
- Matriks A yang berukuran dari m baris dan n kolom ($m \times n$) adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matriks bujursangkar adalah matriks yang berukuran $n \times n$.
- Dalam praktek, kita lazim menuliskan matriks dengan notasi ringkas $A = [a_{ij}]$.
- **Contoh** Di bawah ini adalah matriks yang berukuran 3×4:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

3

Matriks

- Matriks simetri adalah matriks yang $a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap i dan j.
- **Contoh** Di bawah ini adalah contoh matriks simetri.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & -4 \\ 6 & 3 & 7 & 3 \\ 6 & 7 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

- Matriks *zero-one* (0/1) adalah matriks yang setiap elemennya hanya bernilai 0 atau 1.
- **Contoh** Di bawah ini adalah contoh matriks 0/1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4

Cartesian Product

Produk kartesis dari himpunan *S* dan himpunan *T* adalah himpunan *S* x*T* berikut ini.

Produk kartesis dari *S* dan *T*

Pasangan terurut/ *ordered tuple* (*b*,*c*)

$$\boldsymbol{S \times T = \{ (b, c) \mid b \in S \wedge c \in T \}}$$

b* anggota himpunan *S

c* anggota himpunan *T

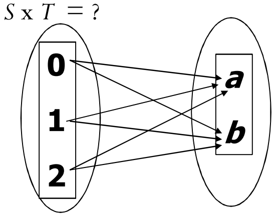
5

Contoh *Cartesian Product*

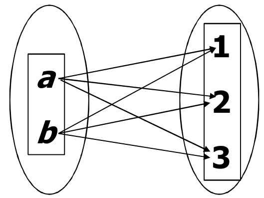
S = { 0, 1, 2}

T = {*a*, *b*}

S x *T* = ?



***T* x *S* = ?**



***S*x*T* = { (0,*a*), (0,*b*), (1,*a*), (1,*b*), (2,*a*), (2,*b*) }**

***T*x*S* = { (*a*,1), (*a*,2), (*a*,3), (*b*,1), (*b*,2), (*b*,3) }**

6

Relasi

- Relasi antara himpunan *A* dan himpunan *B* adalah himpunan bagian dari produk kartesis *A* x *B*
- Himpunan *A* disebut daerah asal (*domain*) dari *R*, dan himpunan *B* disebut daerah hasil (*range*) dari *R*.
- Relasi antar 2 himpunan disebut juga relasi biner
- *R*:*A*x*B* menyatakan bahwa R merupakan relasi biner dari *A* ke *B*
- $R: AxB \subseteq AxB$
- *a R b* adalah notasi untuk $(a, b) \in R$, yang artinya *a* dihubunganKan dengan *b* oleh *R*
- $a \not R\, b$ adalah notasi untuk $(a, b) \notin R$, yang artinya *a* tidak dihubungkan oleh *b* oleh relasi *R*.

7

Contoh Relasi Biner

- Diberikan himpunan S = {1,2} dan T = {a,b}

  Buatlah semua relasi yang mungkin dari himpunan S dan T
- Jawab:

  S x T = {(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)}

  Setiap himpunan bagian dari S x T merupakan sebuah relasi antara S dan T.

  Maka dapat dibuat $2^4 = 16$ relasi antara S dan T.

$R_1 = \phi$	$R_7 = \{(1, a), (2, a)\}$	$R_{13} = \{(1, a), (1, b), (2, b)\}$
$R_2 = \{(1, a)\}$	$R_8 = \{(1, a), (2, b)\}$	$R_{14} = \{(1, a), (2, a), (2, b)\}$
$R_3 = \{(1, b)\}$	$R_9 = \{(1, b), (2, a)\}$	$R_{15} = \{(1, b), (2, a), (2, b)\}$
$R_4 = \{(2, a)\}$	$R_{10} = \{(1, b), (2, b)\}$	$R_{16} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$
$R_5 = \{(2, b)\}$	$R_{11} = \{(2, a), (2, b)\}$	
$R_6 = \{(1, a), (1, b)\}$	$R_{12} = \{(1, a), (1, b), (2, a)\}$	

8

Relasi pada Sebuah Himpunan

- Relasi (biner) dari himpunan A ke dirinya sendiri disebut relasi pada himpunan A.
- Relasi pada himpunan A adalah relasi dari $A \times A$.
- Relasi pada himpunan A adalah himpunan bagian dari $A \times A$.
- Contoh:
  - Pada himpunan B = {1, 2, … 9, 10} dibuat relasi ADD5 dengan definisi : ADD5 = { (x,y) | x ∈ B ∧ y ∈ B ∧ y = x+5 }
    Maka ADD5 = { (1,6), (2,7), (3,8), (4,9), (5,10) }
  - Misalkan R adalah relasi pada $A = \{2, 3, 4, 8, 9\}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in R$ jika x adalah faktor prima dari y.
    Maka $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)$

9

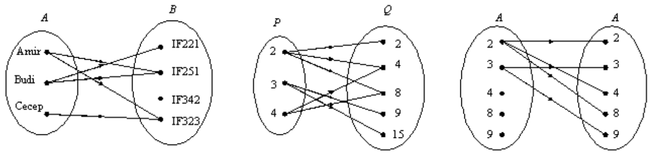
Domain dan Range

- Domain = daerah asal relasi
  - Domain dari R dinyatakan dengan *Dom*.R
- Range = daerah jelajah relasi
  - Range dari R dinyatakan dengan *Ran.* R
- Contoh:
  - ρ = {(0,0), (1,1), (4,2), (9,3), (16,4), (25,5)}
    - Dom.ρ = {0,1,4,9,16,25}
    - Ran. ρ = {0,1,2,3,4,5}
  - KD menyatakan relasi kelipatan dua pada Z
    KD = {(b,c) | b ∈ Z ∧ c ∈ Z ∧ b = c*2}
    - Dom.KD = { 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,…}
    - Ran.KD = Z

10

Representasi Relasi(1)

- ***Representasi Relasi dengan Diagram Panah***



- ***Representasi Relasi dengan Tabel :*** Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil

Tabel 1

A	*B*
Amir	IF251
Amir	IF323
Budi	IF221
Budi	IF251
Cecep	IF323

Tabel 2

P	*Q*
2	2
2	4
4	4
2	8
4	8
3	9
3	15

Tabel 3

A	*A*
2	2
2	4
2	8
3	3
3	3

11

Representasi Relasi(2)

- ***Representasi Relasi dengan Matriks***
  - Misalkan R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.
  - Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

  - yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

12

Representasi Relasi(3)

- ***Representasi Relasi dengan Matriks***
  - Contoh:
    - A = {Amir, Budi, Cecep}, B = {IF221, IF251, IF342, IF323}
    - Relasinya dapat dinyatakan sebagai

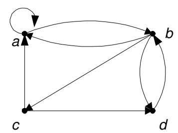
$$\begin{array}{c} \\ Amir \\ Budi \\ Cecep \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} IF221 & IF251 & IF324 & IF323 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- ***Representasi Relasi dengan Graf Berarah***
  - Relasi pada sebuah himpunan dapat direpresentasikan secara grafis dengan **graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)
  - Graf berarah tidak didefinisikan untuk merepresentasikan relasi dari suatu himpunan ke himpunan lain

13

Representasi Relasi(4)

- ***Representasi Relasi dengan Graf Berarah***
  - Tiap elemen himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau *vertex*), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur (*arc*)
  - Jika $(a, b) \in R$, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke simpul b. Simpul a disebut **simpul asal** (*initial vertex*) dan simpul b disebut **simpul tujuan** (*terminal vertex*).
  - Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke simpul a sendiri. Busur semacam itu disebut **gelang** atau **kalang** (*loop*).
  - **Contoh** Misalkan $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, b)\}$ adalah relasi pada himpunan $\{a, b, c, d\}$.
  - R direpresentasikan dengan graf berarah sbb:



14

Relasi Invers (1)

- Definisi:

  ρ^{-1} adalah relasi invers dari ρ jika $(a, b) \in \rho^{-1} \equiv (b, a) \in \rho$.
- Contoh:
  - $\sigma = \{ (1,a), (2,b)\}$ maka $\sigma^{-1} = \{ (a,1), (b,2)\}$
  - $\rho = \{ (a, b) \mid a^2 = b\}$ maka $\rho^{-1} = \{ (b, a) \mid b = a^2\}$
- Beberapa teorema pada relasi invers:
  - $\text{Dom.}(\rho^{-1}) = \text{Ran.}\rho$
  - $\text{Ran.}(\rho^{-1}) = \text{Dom.}\rho$
  - Jika ρ adalah relasi antara himpunan B dan himpunan C, maka ρ^{-1} adalah sebuah relasi antara C dan B.
  - $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$
  - $\rho \subseteq \sigma \equiv \rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$

Relasi Invers (2)

- Jika M adalah matriks yang merepresentasikan relasi R

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1}, misalkan N, diperoleh dengan melakukan *transpose* terhadap matriks M

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat Relasi Biner

6

Kelas Relasi

- ▶ **Refleksif**
- ▶ **Irrefleksif**
- ▶ **Simetri**
- ▶ **Anti Simetri**
- ▶ **Asimetri**
- ▶ **Transitif**

17

Refleksif

- Sebuah relasi R pada A bersifat refleksif jika $\forall a \in A$, berlaku (a R a).
- Contoh:
  - relasi "kenal dengan" bersifat refleksif
  - relasi "mengagumi" tidak refleksif
- Relasi yang bersifat refleksif mempunyai
  - Matriks yang elemen diagonal utamanya semua bernilai 1, atau $m_{ii} = 1$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

  - Graf berarah dari relasi yang bersifat refleksif dicirikan adanya gelang pada setiap simpulnya

18

Irrefleksif

- Sebuah relasi R pada A bersifat irrefleksif jika $\forall a \in A$ berlaku $\neg(a \text{ R } a)$
  - Contoh: relasi "anak dari" bersifat irrefleksif
- Irrefleksif bukan berarti Tidak Refleksif!!!
  - Contoh: $A = \{a,b,c,d\}$

    $\rho = \{ (a,d), (b,c), (c,b), (d,d) \}$ tidak refleksif dan juga tidak irrefleksif

19

Refleksif, Irrefleksif

- Contoh relasi refleksif:

  =, `punya kardinalitas sama', ⇔, <=, >=, ⊆

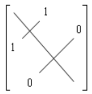
- Contoh relasi irrefleksif:

  <, >, `punya kardinalitas berbeda', ⊂

20

Simetri

- Sebuah relasi R pada A bersifat simetri jika $\forall a \in A$ dan $\forall b \in A$ berlaku a R $b \equiv b$ R a
- Relasi R pada himpunan A disebut simetri jika untuk semua $a, b \in A$, jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$.
- Contoh:
  - Relasi = pada Z bersifat simetri, karena $\forall$a,b $\in Z$, berlaku a=b $\equiv$ b=a
  - Relasi $\leq$ pada Z tidak simetri, karena $1 \leq 2 \not\equiv 2 \leq 1$
- Relasi yang bersifat simetri mempunyai
  - Matriks yang elemen-elemen di bawah diagonal utama merupakan pencerminan dari elemen-elemen di atas diagonal utama, atau $m_{ij} = m_{ji} = 1$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$



  - Graf berarah dari relasi yang bersifat setangkup dicirikan oleh: jika ada busur dari a ke b, maka juga ada busur dari b ke a

21

Asimetri

- Sebuah relasi R pada A bersifat asimetri jika $\forall a, b \in A$ berlaku a R $b \Rightarrow \neg(b$ R $a)$
- Relasi R pada himpunan A tidak setangkup jika $(a, b) \in R$ sedemikian sehingga $(b, a) \notin R$
- Contoh:
  - Relasi < pada Z bersifat asimetri, sebab $\forall b, c \in Z$ berlaku $b < c \Rightarrow \neg(c < b)$.
  - Relasi $\leq$ pada Z tidak bersifat asimetri, sebab $1 \leq 1 \Rightarrow \neg(1 \leq 1)$ bernilai *false*.

22

Antisimetri

- Sebuah relasi R pada A bersifat antisimetri jika $\forall a \in A$ dan $\forall b \in A$ berlaku a R $b \wedge b$ R $a \Rightarrow a = b$
- Relasi R pada himpunan A disebut antisimetri jika untuk semua $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ hanya jika $a = b$
- Contoh:
  - Relasi < pada Z bersifat antisimetri, karena $\forall b,c \in Z$ berlaku $b < c \wedge c < b \Rightarrow b = c$.
  - Relasi $\neq$ pada Z tidak bersifat antisimetri, karena $1 \neq 2 \wedge 2 \neq 1 \Rightarrow 1 = 2$ bernilai *false*.
- Relasi yang bersifat antisimetri mempunyai
  - Matriks m_{ij} dengan $m_{ij} = 1$ dengan $i \neq j$, maka $m_{ji} = 0$ atau jika salah satu dari $m_{ij} = 0$ atau $m_{ji} = 0$ bila $i \neq j$
  - Graf berarah dari relasi yang bersifat tolak-setangkup dicirikan oleh: jika dan hanya jika tidak pernah ada dua busur dalam arah berlawanan antara dua simpul berbeda

23

Transitif

- Sebuah relasi R pada A bersifat bersifat transitif jika $\forall a,b,c \in A$ berlaku a R $b \wedge b$ R $c \Rightarrow a$ R c
- Relasi R pada himpunan A disebut menghantar jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$, untuk $a, b, c \in A$
- Relasi < pada Z bersifat transitif, sebab $\forall a,b,c \in Z$ berlaku jika a < b dan b < c maka a < c.

24

Cara mengecek sifat relasi

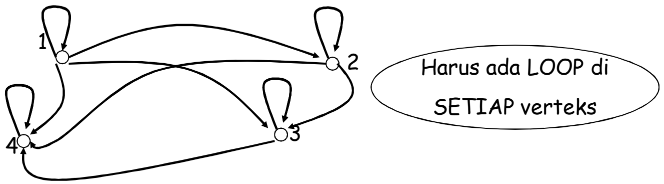
Bagaimana cara mengecek sifat refleksif?

Buat gambar dari relasi (disebut "graf")

- Setiap elemen himpunan digambarkan sebagai verteks
- Setiap elemen relasi digambarkan sebagai edge

Contoh:

R = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}



25

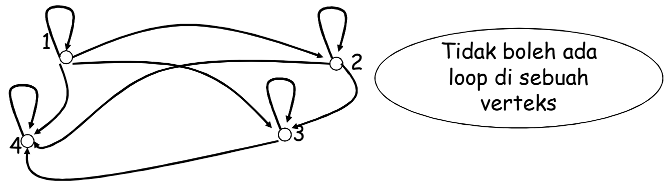
Cara mengecek sifat relasi

Bagaimana cara mengecek sifat irrefleksif?

Gambarkan graf dari relasi

Contoh:

R = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}



26

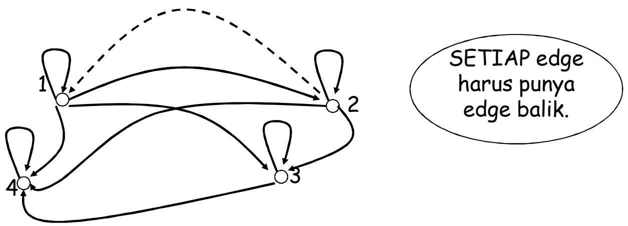
Cara mengecek sifat relasi

Bagaimana cara mengecek sifat simetri?

Buat graf dari relasi

Contoh:

R = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}



27

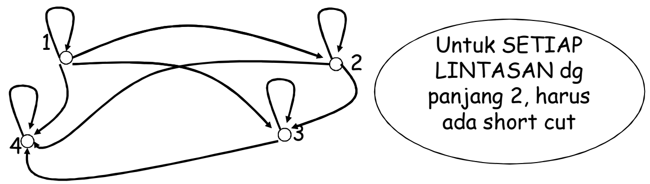
Cara mengecek sifat relasi

Bagaimana cara mengecek sifat transitif?

Buat graf dari relasi

Contoh:

R = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}



28

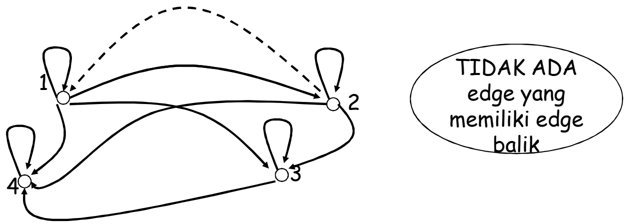
Cara mengecek sifat relasi

Bagaimana cara mengecek sifat antisimetri?

Buat graf dari relasi

Contoh:

R = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}



Mengkombinasikan Relasi (1)

- Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan *Symmetric Difference* antara dua relasi atau lebih juga berlaku.
- Jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpuna A ke himpunan B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari A ke B.
- Contoh : Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$.

  $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ dan $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$
  - $R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$
  - $R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$
  - $R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$
  - $R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$
  - $R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

Mengkombinasikan Relasi (2)

- Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan gabungan dan irisan dari kedua relasi tersebut adalah

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} \qquad \text{dan} \qquad M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$$

- **Contoh :** Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Komposisi Relasi (1)

- Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan S adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi R dan S, dinotasikan dengan $S \circ R$, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh

  $S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C$, dan untuk beberapa $b \in B$, $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S \}$
- **Contoh:** Misalkan $R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$ adalah relasi dari himpunan $\{1, 2, 3\}$ ke himpunan $\{2, 4, 6, 8\}$ dan $S = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$ adalah relasi dari himpunan $\{2, 4, 6, 8\}$ ke himpunan $\{s, t, u\}$.

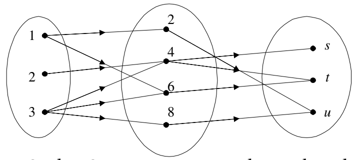
  Maka komposisi relasi R dan S adalah

  $S \circ R = \{(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u) \}$

Komposisi Relasi (2)

- **Contoh (lanjutan)**

  Komposisi relasi *R* dan *S* lebih jelas jika diperagakan dengan diagram panah:



- Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan komposisi dari kedua relasi tersebut adalah

  $$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \cdot M_{R2}$$

  yang dalam hal ini operator "." sama seperti pada perkalian matriks biasa, tetapi dengan mengganti tanda kali dengan "$\wedge$" dan tanda tambah dengan "$\vee$"

33

Komposisi Relasi (3)

- **Contoh** Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan *A* dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang menyatakan $R_2 \circ R_1$ adalah

$$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \,.\, M_{R2}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

34

Relasi *n-ary (1)*

- Relasi biner hanya menghubungkan antara dua buah himpunan.
- Relasi yang lebih umum menghubungkan lebih dari dua buah himpunan. Relasi tersebut dinamakan relasi *n-ary* (baca: ener).
- Jika $n = 2$, maka relasinya dinamakan relasi biner (bi = 2). Relasi *n-ary* mempunyai terapan penting di dalam basis data.
- Misalkan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah himpunan. Relasi *n-ary R* pada himpunan-himpunan tersebut adalah himpunan bagian dari $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, atau dengan notasi $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ disebut daerah asal relasi dan *n* disebut **derajat**.

35

Relasi *n-ary (2)*

- **Contoh** Misalkan *NIM* = {011, 014, 015, 019, 021, 025}; *Nama* = {Amir, Santi, Irwan, Ahmad, Cecep, Hamdan}; *MatKul* = {MATDIS, ALGO, STRUKDAT, ARKOM}; *Nilai* = {A, B, C, D, E}
- Relasi *MHS* terdiri dari 5-tupel (*NIM*, *Nama*, *MatKul*, *Nilai*):

  $MHS \subseteq NIM \times Nama \times MatKul \times Nilai$
- Satu contoh relasi yang bernama *MHS* adalah

  MHS = {(011, Amir, MATDIS, A), (011, Amir, ARKOM, B), (014, Santi, ARKOM, D), (015, Irwan, ALGO, C), (015, Irwan, STRUKDAT C), (015, Irwan, ARKOM, B), (019, Ahmad, ALGO, E), (021, Cecep, ALGO, A), (021, Cecep, ARKOM, B), (025, Hamdan, MATDIS, B), (025, Hamdan, ALGO, A, B), (025, Hamdan, STRUKDAT, C), (025, Hamdan, ARKOM, B) }

36

Relasi *n-ary (3)*

- **Contoh (lanjutan)**

Relasi *MHS* di atas juga dapat ditulis dalam bentuk Tabel

NIM	Nama	MatKul	Nilai
011	Amir	MATDIS	A
011	Amir	ARKOM	B
014	Santi	ALGO	D
015	Irwan	ALGO	C
015	Irwan	STRUKDAT	C
015	Irwan	ARKOM	B
019	Ahmad	ALGO	E
021	Cecep	ALGO	B
021	Cecep	ARKOM	B
025	Hamdan	MATDIS	B
025	Hamdan	ALGO	A
025	Hamdan	STRUKDAT	C
025	Hamdan	ARKOM	B

37

Relasi *n-ary (4)*

- **Intro Basis Data**
  - Basis data (*database*) adalah kumpulan tabel.
  - Salah satu model basisdata adalah **model basis data relasional** (*relational database*). Model basis data ini didasarkan pada konsep relasi *n-ary*.
  - Pada basis data relasional, satu tabel menyatakan satu relasi. Setiap kolom pada tabel disebut **atribut**. Daerah asal dari atribut adalah himpunan tempat semua anggota atribut tersebut berada.
  - Setiap tabel pada basis data diimplementasikan secara fisik sebagai sebuah *file*.
  - Satu baris data pada tabel menyatakan sebuah *record*, dan setiap atribut menyatakan sebuah *field*.
  - Atribut khusus pada tabel yang mengidentifikasikan secara unik elemen relasi disebut **kunci** (*key*).
  - Operasi yang dilakukan terhadap basis data dilakukan dengan perintah pertanyaan yang disebut *query*

38

Relasi *n-ary (5)*

- **Intro Basis Data (Lanjutan)**
  - *Query* terhadap basisdata relasional dapat dinyatakan secara abstrak dengan operasi pada relasi *n-ary*.
  - Ada beberapa operasi yang dapat digunakan, diantaranya adalah
    - seleksi,
      - Operasi seleksi memilih baris tertentu dari suatu tabel yang memenuhi persyaratan tertentu.
      - Operator: σ
      - **Contoh :** Misalkan untuk relasi MHS kita ingin menampilkan daftar mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematik Diskrit. Operasi seleksinya adalah $\sigma_{\text{Matkul="MATDIS"}}$(MHS)
        Hasil:
        (011, Amir, MATDIS, A) dan (025, Hamdan, MATDIS, B)

39

Relasi *n-ary (5)*

- **Intro Basis Data (Lanjutan)**
  - proyeksi
    - Operasi proyeksi memilih kolom tertentu dari suatu tabel. Jika ada beberapa baris yang sama nilainya, maka hanya diambil satu kali.
    - Operator: π
    - Contoh : $\pi_{\text{NIM, Nama}}$ (MHS)

NIM	Nama
011	Amir
014	Santi
015	Irwan
019	Ahmad
021	Cecep
025	Hamdan

40

Relasi *n-ary (6)*

- **Intro Basis Data (Lanjutan)**
  - Join
    - Operasi *join* menggabungkan dua buah tabel menjadi satu bila kedua tabel mempunyai atribut yang sama.
    - Operator: τ
    - Contoh : MHS1

NIM	Nama	JK
001	Hananto	L
002	Guntur	L
004	Heidi	W
006	Harman	L
007	Karim	L

MHS2

NIM	Nama	MatKul	Nilai
001	Hananto	ALGO	A
001	Hananto	Basisdata	B
004	Heidi	Kalkulus I	B
006	Harman	Teori Bahasa	C
006	Harman	Agama	A
009	Junaidi	Statisitik	B
010	Farizka	Otomata	C

$\tau_{\text{NIM, Nama}}$(MHS1, MHS2)

NIM	Nama	JK	MatKul	Nilai
001	Hananto	L	ALGO	A
001	Hananto	L	Basisdata	B
004	Heidi	W	Kalkulus I	B
006	Harman	L	Teori Bahasa	C
006	Harman	L	Agama	A

41

FUNGSI

42

Fungsi (1)

- Misalkan A dan B himpunan.
- Relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika *setiap* elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B.
- Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan

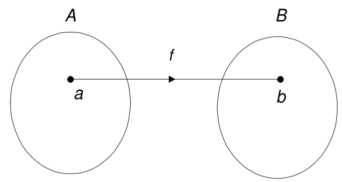
  $f : A \rightarrow B$

  yang artinya f **memetakan** A ke B.
- A disebut **daerah asal** (*domain*) dari f dan B disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari f.
- Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**.

43

Fungsi (1)

- Kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B.
- Jika $f(a) = b$, maka b dinamakan **bayangan** (*image*) dari a dan a dinamakan **pra-bayangan** (*pre-image*) dari b.
- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (*range*) dari f. Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari B.



44

Fungsi (1)

- Fungsi adalah relasi yang khusus:
  - Tiap elemen di dalam himpunan A harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan f.
  - Frasa "dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B" berarti bahwa jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$.

45

Bentuk Fungsi (1)

- Himpunan pasangan terurut → relasi.
  - Contoh
    - $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$
      dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B. Di sini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$. Daerah asal dari f adalah A dan daerah hasil adalah B. Jelajah dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B.
    - $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$
      dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B, meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A. Daerah asal fungsi adalah A, daerah hasilnya adalah B, dan jelajah fungsi adalah $\{u, v\}$
    - $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$
      dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena tidak semua elemen A dipetakan ke B
    - $f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$
      dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B, yaitu u dan v

46

Bentuk Fungsi (2)

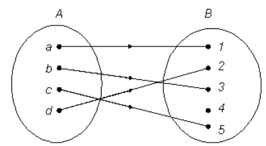
- Formula pengisian nilai (*assignment*).
  - Contoh: $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = 1/x$.
- Kata-kata
  - Contoh: "f adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu *string* biner".
- Kode program (*source code*)
  - Contoh: Fungsi menghitung $|x|$

```
function abs(x:integer):integer {
  if x < 0 then abs:=-x
  Else abs:=x;
}
```

47

Fungsi Satu ke Satu (1)

- Fungsi f dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama



- Contoh
  - $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ adalah fungsi satu-ke-satu,
  - $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena $f(1) = f(2) = u$.

48

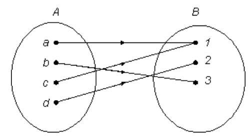
Fungsi Satu ke Satu (2)

- Contoh (lanjutan)
  - Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?
  - Penyelesaian:
    - $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena untuk dua x yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya $f(2) = f(-2) = 5$ padahal $-2 \neq 2$.
    - $f(x) = x - 1$ adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk $a \neq b$, $a - 1 \neq b - 1$.
      Misalnya untuk $x = 2$, $f(2) = 1$ dan untuk $x = -2$, $f(-2) = -3$

49

Fungsi **pada** (*onto*) (1)

- Fungsi f dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A.
- Dengan kata lain seluruh elemen B merupakan jelajah dari f. Fungsi f disebut fungsi pada himpunan B.



50

Fungsi **pada** (*onto*) (2)

- Contoh
  - $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi pada karena w tidak termasuk jelajah dari f.
  - $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada karena semua anggota B merupakan jelajah dari f.
  - Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi pada?
  - Penyelesaian:
    - $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi pada, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari f.
    - $f(x) = x - 1$ adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan bulat y, selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x - 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$.

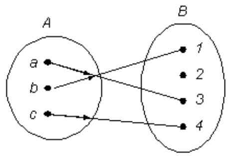
51

Fungsi **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*)

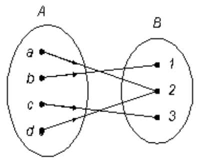
- Fungsi f dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada
- Contoh
  - *Fungsi* $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.
  - Fungsi $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada

52

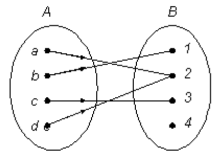
Fungsi satu-ke-satu, bukan pada



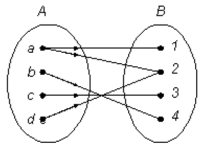
Fungsi pada, bukan satu-ke-satu



Buka fungsi satu-ke-satu maupun pada



Bukan fungsi



53

Fungsi Balikan (Invers) (1)

- Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan **balikan** (*invers*) dari f.
- Balikan fungsi dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.
- Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya. Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada

54

Fungsi Balikan (Invers) (2)

- Contoh
  - $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu. Balikan fungsi f adalah $f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$ Jadi, f adalah fungsi *invertible*.
  - Tentukan balikan fungsi $f(x) = x - 1$.

    Penyelesaian:
    - Fungsi $f(x) = x - 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada.
    - Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x - 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah $f^{-1}(y) = y + 1$.
  - Tentukan balikan fungsi $f(x) = x^2 + 1$.

    Penyelesaian: $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada. Jadi, $f(x) = x^2 + 1$ adalah fungsi yang *not invertible*.

55

Komposisi Dua Buah Fungsi (1)

- Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh

  $(f \circ g)(a) = f(g(a))$
- **Contoh**
  - Diberikan fungsi $g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, dan fungsi $f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$ yang memetakan $B = \{u, v, w\}$ ke $C = \{x, y, z\}$.

    Fungsi komposisi dari A ke C adalah

    $f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x)\}$

56

Komposisi Dua Buah Fungsi (2)

- **Contoh (lanjutan)**
  - Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.
  - Penyelesaian:
    - $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 1 = x^2$.
    - $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$

57

Fungsi-Fungsi Khusus (1)

- **Fungsi *Floor* dan *Ceiling***
  - Misalkan x adalah bilangan riil, berarti x berada di antara dua bilangan bulat.
  - Fungsi *floor* dari x: $\lfloor x \rfloor$ menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x
  - Fungsi *ceiling* dari x: $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x
  - Dengan kata lain, fungsi *floor* membulatkan x ke bawah, sedangkan fungsi *ceiling* membulatkan x ke atas
  - Contoh
    - $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ $\quad \lceil 3.5 \rceil = 4$ $\quad \lfloor 0.5 \rfloor = 0$
    - $\lceil 0.5 \rceil = 1$ $\quad \lfloor 4.8 \rfloor = 4$ $\quad \lceil 4.8 \rceil = 5$
    - $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$ $\quad \lceil -0.5 \rceil = 0$ $\quad \lfloor -3.5 \rfloor = -4$

58

Fungsi-Fungsi Khusus (2)

- **Fungsi modulo**
  - Misalkan a adalah sembarang bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat positif.
  - a mod m memberikan sisa pembagian bilangan bulat bila a dibagi dengan m
  - a mod $m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$.
  - **Contoh**
    - 25 mod 7 = 4 $\quad$ 15 mod 4 = 0
    - 3612 mod 45 = 12 $\quad$ 0 mod 5 = 5
    - –25 mod 7 = 3 (sebab $-25 = 7 \cdot (-4) + 3$)

59

Fungsi-Fungsi Khusus (3)

- **Fungsi Faktorial**

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots . \times (n-1) \times n & , n > 0 \end{cases}$$

- **Fungsi Eksponensial**

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n} & , n > 0 \end{cases} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- **Fungsi Logaritmik**

$$y = {}^{a}\log x \leftrightarrow x = a^y$$

60

Fungsi-Fungsi Khusus (4)

- **Fungsi Rekursif**
  - Fungsi *f* dikatakan fungsi rekursif jika definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri.
  - Contoh: $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n = (n-1)! \times n$.
  - Fungsi rekursif disusun oleh dua bagian:
    - *Basis* : Bagian yang berisi nilai awal yang tidak mengacu pada dirinya sendiri. Bagian ini juga sekaligus menghentikan definisi rekursif.
    - *Rekurens* : Bagian ini mendefinisikan argumen fungsi dalam terminologi dirinya sendiri. Setiap kali fungsi mengacu pada dirinya sendiri, argumen dari fungsi harus lebih dekat ke nilai awal (basis)

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \quad \text{Basis} \\ n \times (n-1)! & , n > 0 \quad \text{Rekurens} \end{cases}$$

61

Referensi

1. Rinaldi Munir. 2003. "Materi Kuliah Matematika Diskrit". Informatika-ITB. Bandung
2. Rinaldi Munir. 2001. "Matematika Diskrit". Informatika. Bandung
3. -. 2010."Matematika Diskrit". UPN Veteran. Jakarta

62